«Մխիթար Սեբաստացի» կրթահամալիր

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑՉԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

«Հետազոտական աշխատանք կատարելու սկզբունքները» բաժին

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Թեմա՝ Կոմբինատոր երկրաչափություն

Կատարող՝ Լուսինե Ներսեսյան

Դասավանդած առարկան՝ Մաթեմատիկա, հանրահաշիվ, երկրաչափություն

Խորհրդատու՝ Գևորգ Հակոբյան

2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Կոմբինատոր երկրաչափությունը 20-րդ դարի հայտնություններից է: Մաթեմատիկական այս ճյուղի հիմունքները, հիմնական սահմանումները, խնդիրները, արդյունքները սահմանվել և ներկայացվել են նախորդ հայուրամյակում և շարունակվում են ուսումնասիրվել մինչև մեր օրեր:

Կոմբինատոր երկրաչափության տեսության սահմանները դեռ լիարժեք որոշված չեն, այն համարվում է դիսկրետ մաթեմատիկայի ճյուղ, միևնույն ժամանակ իր մեջ ներառում է տարրեր ուռուցիկ անալիզից, խմբերի տեսությունից, հանրահաշվական երկրաչափությունից, տարածաչափությունից, բազմությունների տեսությունից ևն: Իհարկե, կարող ենք ընդհանրացված նկարագիր տալ՝ պնդելով, որ այս տեսության հիմնական խնդիրները երկրաչափական են, կապված տարբեր կոմբինացիոն (հիմնականում՝ ուռուցիկ) բազմությունների և դրանց փոխդասավորությունների հետ: Բայց և այնպես վերջին նկարագիրը կլինի թերի և չի կարող տալ գիտության այդ ճյուղի մասին ամբողջական պատկերացում:

Կոմբինատեր երկրաչափության տեսության մեջ բազմաթիվ են խնդիրներ, որոնց լուծումները հասանելի և հասկանալի են նաև աշակերտների համար, միևնույն ժամանակ նույն խնդիրները հետաքրքիր են մաթեմատիկոսներին, ուսուցիչներին: Այդպիսի խնդիրներից մի քանիսը և դրանց լուծման տարբերակները կներկայացվեն այս աշխատության մեջ:

ԳԼՈՒԽ 1

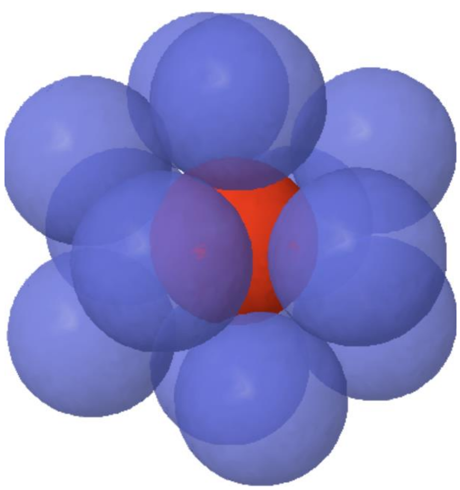
ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՊԱՏՄՈՒԹՅՈՒՆ: ՆՅՈՒՏՈՆԻ ԹԻՎ

Դիսկրետ մաթեմատիկան մաթեմատիկայի ճյուղերից մեկն է, որի ուսումնասիրության առարկա են հանդիսանում դիսկրետ բնույթ ունեցող մաթեմատիկական կառուցվածքների հատկությունները: Այդպիսի կառուցվածքներից են վերջավոր խմբերը, վերջավոր գրաֆները, գրաֆները և այլն: Ի տարբերություն դիսկրետ մաթեմատիկայի, դասական մաթեմատիկան հիմնականում զբաղվում է անընդհատ բնույթ ունեցող կառուցվածքների հատկությունների ուսումնասիրությամբ:

Դիսկրետ և անընդհատ մաթեմատիկաների միջև հստակ սահմանազատում չկա. նրանց միջև անընդհատ տեղի է ունենում գաղափարների և մեթոդների փոխանակում և հաճախ հարկ է լինում ուսումնասիրել մոդելներ, որոնք միաժամանակ օժտված են և՛ դիսկրետ, և՛ անընդհատ հատկություններով:

Դիսկրետ մաթեմատիկայի ճյուղերից է կոմբինատոր երկրաչափությունը: Կոմբինատոր կամ դիսկրետ երկրաչափությունը մաթեմատիկայի այն բաժինն է, որն ուսումնասիրում է երկրաչափական պատկերների և դրանց հետ կապված կառուցումների կոմբինատոր հատկությունները: Կոմբինատոր երկրաչափությունը ուսումնասիրում է վերջավոր և անվերջ դիսկրետ բազմությունները կամ երկրաչափական հիմնական պատկերների կառուցումները (կետեր, ուղիղներ, բազմանկյուններ, շրջանագծեր, նույն տրամագծով մարմիններ և այլն), դրանց փոխդասավորությունները, կամբինացիանները և հատկությունները: Մաթեմատիկայի այս ճյուղը կապված է գրաֆների տեսության, թվերի տեսության, երկրաչափական և կոմբինատորիկայի մի շարք այլ բաժինների հետ: Որպես առանձին գիտություն Կոմբինատոր երկրաչափությունը ձևավորվել է 19-րդ դարի վերջում և 20-րդ դարի սկզբում:

Կոմբինատոր երկրաչափության ամենահին հարցերից մեկը վերաբերվում է Նյուտոնի կամ կոնտակտային թվին[1]: Խնդրի ձևակերպումը հետևյալն է. «Ինչի՞ է հավասար ամենամեծ քանակը միավոր շառավղով այն գնդերի, որոնք միաժամանակ շոշափում են նման մեկ այլ գնունդ, ընդ որում չեն հատվում տրված գունդը»: Դեռ 17-րդ դարում Նյուտոնը և Գրեգորին վիճում էին այս հարցի շուրջ. Ի. Նյուտոնը գտնում էր, որ այդ թիվը հավասար է 12-ի, իսկ Դ. Գրիգորին առաջարկում էր վարկած, որ թիվը 13 է: Միայն 20-րդ դարում հնարավոր եղավ ապացուցել, որ ճիշտ էր Նյուտոնի առաջարկած վարկածը: Թե ինչպես են միավոր շառավղով 12 գնդերը շոշափում կենտրոնական միանման մեկ այլ գնդի, տե՛ս նկարում՝

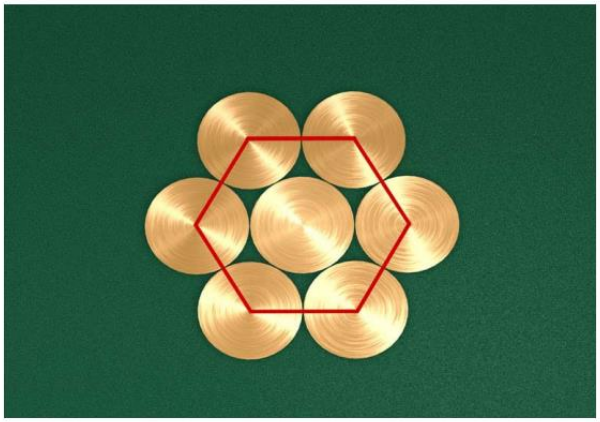


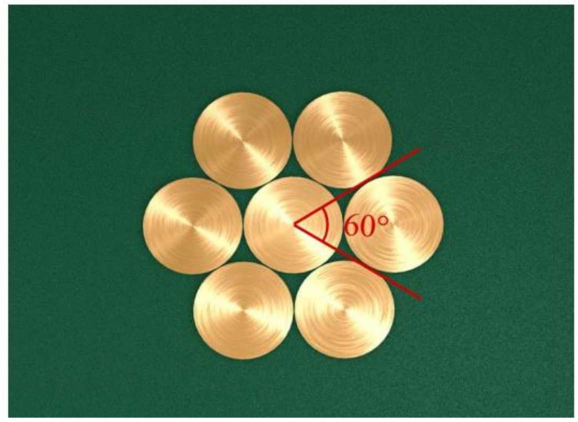
Ի՞նչ է ներկայացնում կոնտակտային կամ նյուտոնի թիվը: Հարցին պատասխանելու համար դիտարկենք խնդիրը հարթության վրա՝ երկչափ տարածությունում:

Հարթության վրա կոնտակտային թվի վերաբերյալ խնդիրն ունի հետևյալ ձևակերպումը. «Քանի՞ միևնույն շառավիղ ունեցող մետաղադրամ կարող է շոշափել

[1] Նյուտոնի կամ կոնտակտային թիվ: Հնարավոր ամենամեծ քանակը միավոր շառավղով այն գնդերի, որոնք n-չափանի էվկլիդյան տարածությունում միաժամանակ կարող են շոշափել նման մեկ այլ կենտրոնական գնդի

նույն շառավղով տրված մետաղադրամը»: Պատասխանը պարզ է, լուծումը՝ տրիվյալ. անհրաժեշտ է պարզապես հարթության վրա տեղադրել նույն շառավղով մետաղադրամները համապատասխան խնդրի պահանջին:

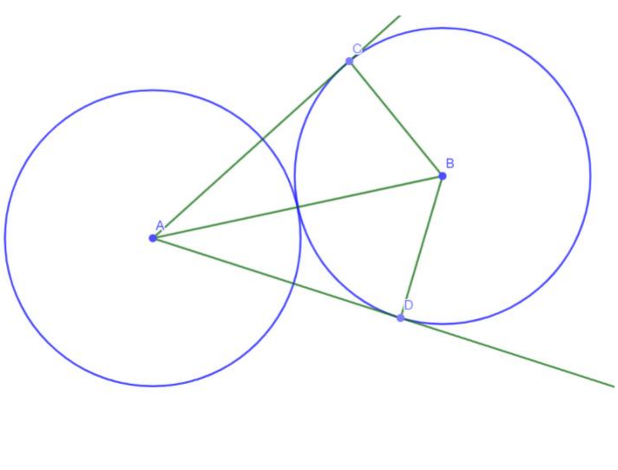




Այդպիսով, ակնհայտ է՝ մետաղադրամների քանակը 6-ն է:

Հիմնավորենք պատասխանը՝ տալով խնդրի երկրաչափական լուծումը:

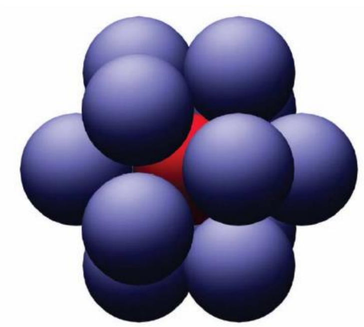
Դիցուք կառուցենք միավոր շառավղով A կենտրոնով շրջանագիծ, կից կառուցենք նաև միևնույն շառավղով B կենտրոնով շրջանագիծ, որը շոշափում է առաջին շրջանագիծը: Փորձենք հաշվել քանի այդպիսի քանի շրջանագիծ կարող ենք կառուցել:



Կատարենք կառուցում. միացնենք շրջանագծերի կենտրոնները, ապա A կետից կառուցենք ճառագայթներ, որոնք կշոշափեն B կենտրոնով շրջանագիծը: Առաջանում են ուղղանկյուն եռանկյուններ, որոնք հավասար են : Դիտարկելով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, անմիջապես նկատում ենք, որ CB=1; AB=2՝ AB=2CB, ըստ որի կարող ենք պնդել, որ <BAC=30^0, և հետևաբար <CAD=60^0:

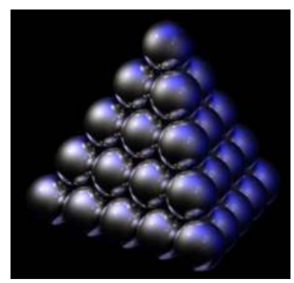
Այսպիսով, շրջանագծին կարող են շոշափել նույն շառավղով 360:60=6 շրջանագիծ:

Եռաչափ տարածությունում կոնտակտային թվի վերաբերյալ խնդիրը վերաձևակերպենք հետևյալ կերպ նույն շառավղով քանի՞ կապույտ գնդակ կշոշափի կենտրոնում գտնվող նույն շոշափողով կարմիր գնակը: Այպսիսի ձևակերպմամբ խնդիրը կարող են լուծել նաև կրտսեր դպրոցի սովորողները, եթե նրանց տալ գունավոր գնդակները և խնդրել դասավորել դրանք համապատասխան խնդրի պայմանի:



Եռաչափ տարածության մեջ լավագույն համաչափ դասավորությունը ստացվում է, երբ կապույտ գնդակների քանակը 12 է, ճիշտ կանոնավոր իկոսաեդրի [2]գագաթների քանակին հավասար:

Վերոհիշյալ խնդրի պատմությունը սկսվում է 1585 թվականից, երբ սըր Ուոլեր Ռելին պահանջեց հաշվել և դուրս բերել բանաձև, որը կորոշի, թե թնդանոթի քանի գնդակ է պարունակում մեկ վանդակում: Դեռ այդ թվերին Թոմաս Հերրիոտը ապացուցեց, որ լավագույն տարբերակը բուրգի (FCC[3]) տեսք ունի, ըստ որի գնդակների քանակը 12 է:



Խնդրին անդրադարձել են այնպիսի մեծ գիտնականներ, ինչպիսիք են Յ. Կեպլերը, Դ. Գրիգորին, Ի. Նյուտոնը, Դ. Հիլբերտը, Կ. Գաուսը ևն, բայց եռաչափ տարածությունում խնդրի պատասխանի միակությունը ապացուցել են Կ. Շյուտեն և Բ.

[2] Կանոնավոր իկոսաեդրը կանոնավոր ուռուցիկ բազմանիստ է, քսանանիստ, Պլատոնական մարմիններից մեկը: Կազմված է 20 նիստերից, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասարակողմ եռանկյուն է: Կողերի քանակը 30 է, գագաթների թիվը՝ 12: Իկոսաեդրն ունի 59 աստղային տեսք: Տե՛ս տեսահոլովակը:

[3] FCC – Face-Centered Cubic: Հավասար շառավղով գնդերի ամենախիտ խմբավորումը

Լինդերտը 1953 թվականին, իսկ արդեն 2003 թվականին Մուսինն ապացուցեց, որ քառաչափ տարածությունում գնդերի քանակը կլինեն 24: Խնդիրը ապացուցվել է մինչև n=13 չափանի տարածությունների համար, վերջինը ևս O. Մուսինի ներդրումն է, 2010 թվական[4]:

[4] Configuration Spaces Of Equal Spheres Touching A Given Sphere: The Twelve Spheres Problem - Rob Kusner, Wöden Kusner, Jeffrey C. Lagarias, And Senya Shlosmandate: February 26, 2018 version. 2010 Mathematics Subject Classification.

ԳԼՈՒԽ 2

ԽԱՂ ՊԵՆՏԱՄԻՄՈ: ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՈՐՈՆՑ ՊԱՏԱՍԽԱՆԸ ՏԱԼԻՍ Է ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ

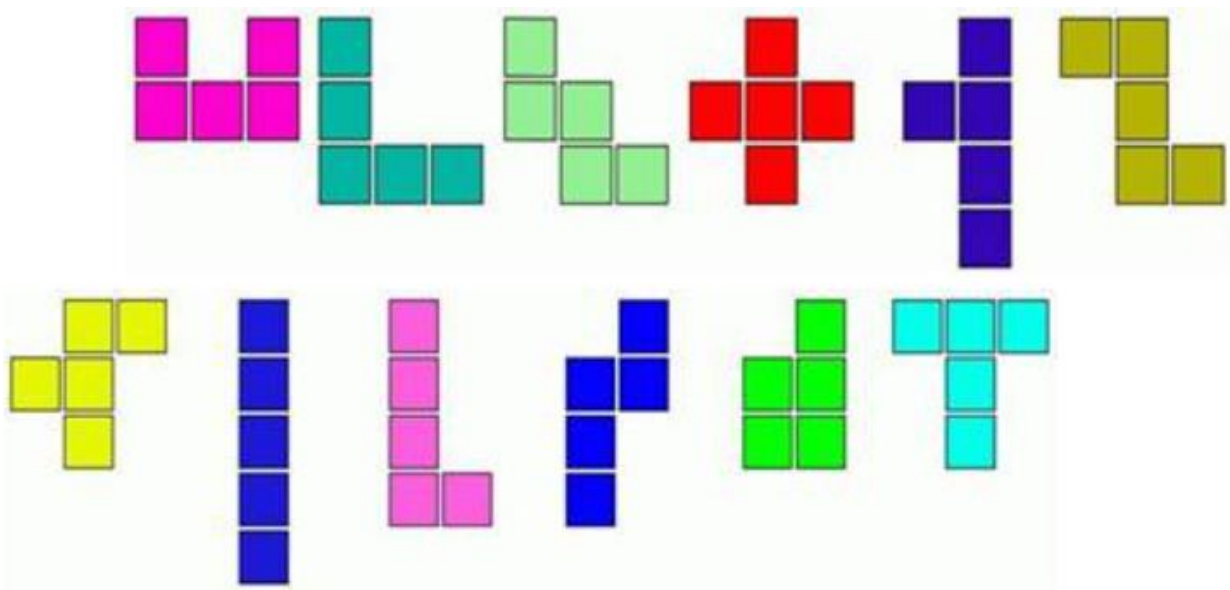
Դասապրոցեսի ընթացքում սովորողին դեպի մաթեմատիկան գրավելու, սեր և հետաքրքրություն առաջացնելու համար անընդհատ օգտագործում ենք ամենատարբեր հետաքրքիր խնդիրներ, փազլներ, գլուխկոտրուկներ, որոնք օգնում են զարգացնել վերլուծական միտքը, տրամաբանությունը, հետազոտական հմտությունները: Այդպիսի մի խաղ է պենտամինոն, որը թույլ է տալիս զարգացնել աբստրակտ և օպերատիվ մտածողությունը, երկրաչափական տարածական պատկերացումը, ձևավորում է համառություն և համբերատարություն, սովորեցնում է սահմանել, հայտնաբերել, ստեղծել և վերլուծել:

Պոլիմինոն երկչափական պատկերներ են, որոնք կազմված են միավոր քառակուսիներից, և կախված քառակուսիների թվից դրանք ստացել են առանձին անվանումներ, ինչպես օրինակ՝

1- Մոնիմինո
2- Դոմինո
3- Տրիմինո
4- Տետրամինո
5- Պենտամինո
6- Հեքսամինո
7- Հեպտամինո
8- Օկտամինո
9- Նոնամինո
10- Դեկտամինո և այլն…

Պոլիմինո գլուխկոտրուկը առաջարկում է խնդիրներ, որոնց լուծումները ստացվում են կոմբինատոր երկրաչափության միջոցով: Այդպիսի մի խնդիր է պենտամիմոյի խնդիրը:

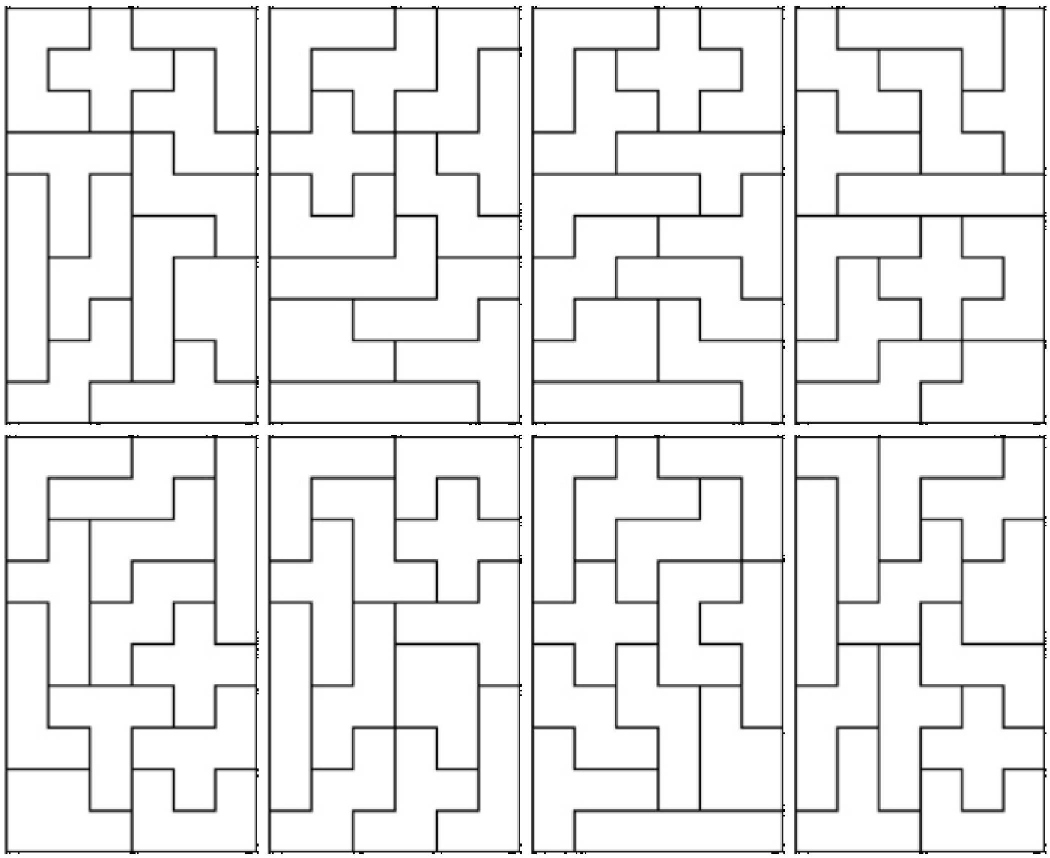
Պոլիմինոն, որը կազմված է հինգ միավոր քառակուսիներից և ծածկում է շախմատի տախտակի հինգ վանդակները, ստացել է պենտամինո անվանումը: Գոյություն ունի 12 պենտամինո: Տե՛ս նկարում.



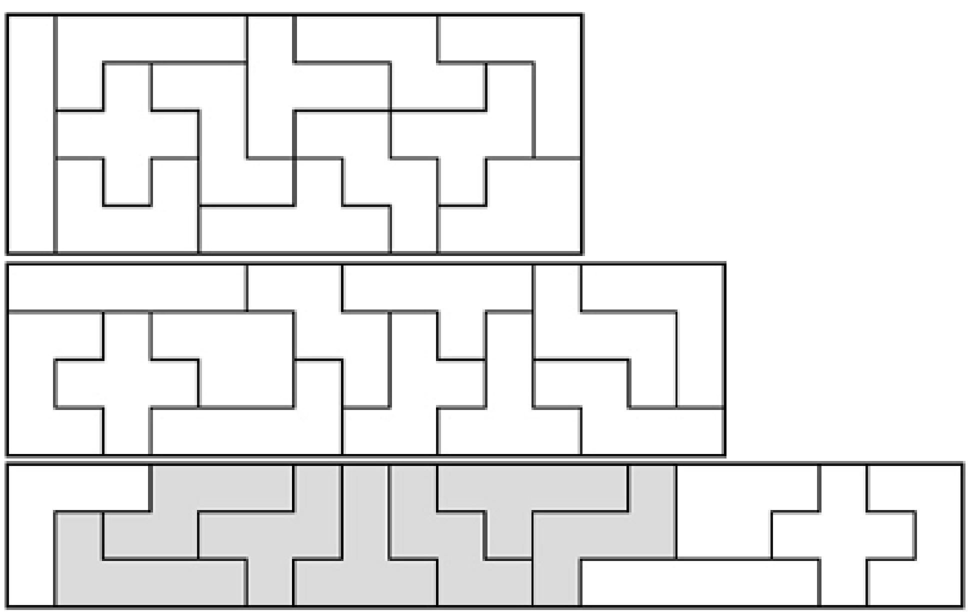
Պենտամինոյի ամենատարածված խնդիրներից մեկն է դասավորել բոլոր 12 պատկերները մեկ ուղղանկյան մեջ այնպես, որ որևէ բաց վանդակ չմնա և, քանի որ յուրաքանչյուր պենտամինո կազմված է 5 քառակուսիներից, ապա այդ ուղղանկյունը պետք է պարունակի 5x12=60 միավոր քառակուսի: Այդպիսի հնարավոր ուղղանկյուններ են ՝ 6x10; 5x12; 4x15 և 3x20 ուղղանկյունները:

6x10 ուղղանկյան դեպքում խնդիրն առաջինը լուծել է Ջ. Ֆլեչերը 1965 թվականին: Այս դեպքի համար գոյություն ունեն 2339 տարբեր լուծումներ: 5x12 ուղղանկյան համար լուծումները 1010-ն են, 4x15-ի դեպքում՝ 368, իսկ 3x20-ն ունի ընդամենը 2 լուծում:

Տե՛ս մի քանի լուծում 6x10 ուղղանկյան համար, որն առաջարկել է Ջ. Ֆլեչերը:



Ստորև ներկայացված են մեկական լուծումներ 5x12; 4x15 և 3x20 ուղղանկյունների համար:



Բոլոր հնարավոր լուծումները գտնելու համար անհրաժեշտ է նախ համարակալել 12 պենտամինոները, որից հետո դրանք դասավորելիս նշելով համարներըէ հնարավոր է առանձնացնել և տարբերել կոմբինացիաները, դա կօգնի նաև համընկնող կոմբինացիաները բացառել: Ինչպես նաև հարկ է հաշվի առնել որոշ պենտամինոների առանձնահատկությունները, և դրանց արդյունքում որոշ հստակ կոմբինացիաների ձևավորումները: Վերջինները ևս կօգնեն առավել դյուրին դարձնել նոր դասավորությունների ստացումը:

Վերը բերված սխեմայով դասավորենք արդեն համարակալված պենտամինոները, նշենք հերթականությունը: Բերենք այդպիսի մեկ օրինակ.

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12

Խնդրի ուսումնասիրությունը հետաքրքիր հետազոտական աշխատանք կարող է դառնալ սովորողի համար: Այն հնարավորություն է տալիս ուսումնասիրել խնդիրը հավաքագրել ինֆորմացիա, տվյալներ խնդրի շուրջ, գտնել լուծումներ, համեմատել դրանք արդեն գտնված լուծումների հետ: Ինչպես նաև այս ուսումնասիրությունը ուղղ ճանապարհ է անդրադառնալու տետրիմինների շուրջ կազմված խնդիրներին:

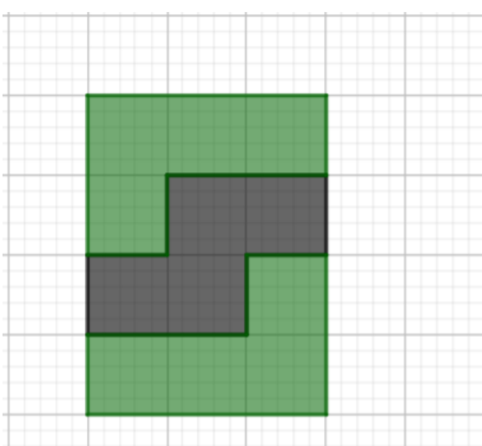
ԳԼՈՒԽ 3

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՏԵՏՐԻՄԻՆՈՆԵՐՈՎ

1. Ուղղանկյունը ծածկված է L-տետրիմինոներով և S-տետրիմինոներով: Ապացուցել, որ L-տետրիմինոների քանակը զույգ է:

L-տետրիմինո S-տետրիմինո

Խնդրի լուծումը տրիվյալ է, կարելի է առաջարկել ինչպես կրտսեր դպրոցում, այնպես էլ միջին և ավագ դպրոցներում: Այսօրինակ խնդիրները կիրառելի են նաև ծրագրավորման (գրեթե բոլոր) լեզուների ուսուցման պրոցեսում, նաև սրանք ներկայացված որպես տետրիս խաղ տարբեր լուծումներով,ընդ որում խաղը սիրում և խաղում են անգամ նախադպրոցական տարիքի երեխաները:



Ըստ խնդրի պայմանի L-տետրիմինոներով և S-տետրիմինոներով ծածկված է ամբողջ ուղղանկյունը ինչպես օրինակ կից նկարում է: Ապացույցն ակնհայտ է, քանի որ յուրաքանչյուր S-տետրիմինոյի բաց վանդակները ծածկելու համար անհրաժեշտ է 2 L-տետրիմինո, Հակառակ դեպքում պարզապես բաց են մնում վանդակները և լիարժեք չեն ծածկում ուղղանկյունը: Այսպիսով, ցանկացած n քանակի S-տետրիմինո օգտագործելու դեպքում, L-տետրիմինոների քանակը կլինի 2n, որն էլ զույգ թիվ է:

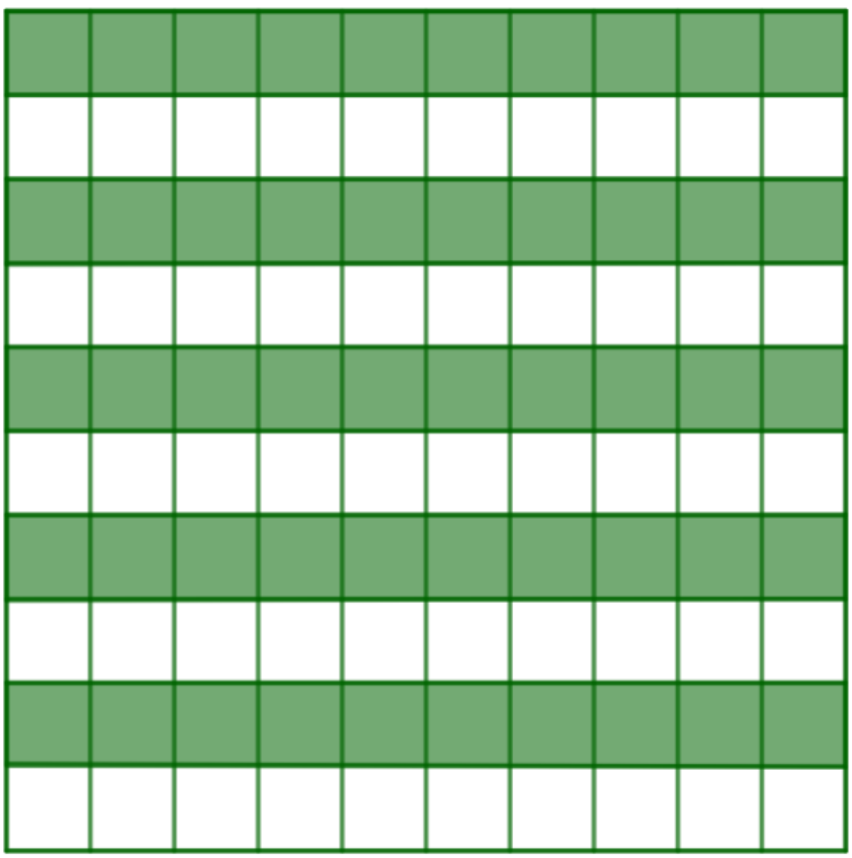
2. Հնարավոր է արդյո՞ք 10×10 տախտակը ծածկել L-աձև պատկերներով (տետրիմինոներով):

Ենթադրենք հնարավոր է միայն L- աձև տետրիմինոներով ծածկել 10×10 քառակուսի տախտակը: Յուրաքանչյուր L-աձև տետրիմինո ունի 4 վանդակ, հետևաբար 10×10 քառակուսին ծածկելու համար անհաժեշտ է

$$\frac{10 \times 10}{4} = 25$$

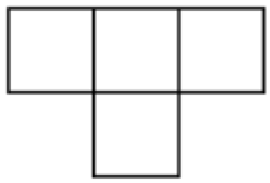
տետրիմինո:

Տախտակը ներկենք ըստ շարքերի ինչպես վարը բերված նկարում:



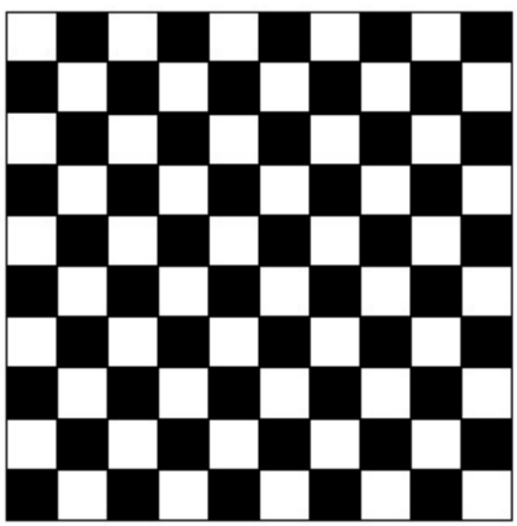
Քանի որ օգտագործվել է 25 հատ տետրիմինո, հետևաբար յուրաքանչյուր L-աձև տետրիմինո ծածկել է կենտ քանակով ներկված վանդակներ, բայց ներկված վանդակների քանակը 50 է, որը զույգ թիվ է: Եկանք հակասության, այստեղից կարող ենք եզրակացնել, որ հնարավոր չէ տախտակը ծածկել միայն L-աձև պատկերներով:

3. Հնարավո՞ր է արդյոք 10×10 տախտակը ծածկել 25 հատ T-աձև պատկերներով (տետրիմինոներով):

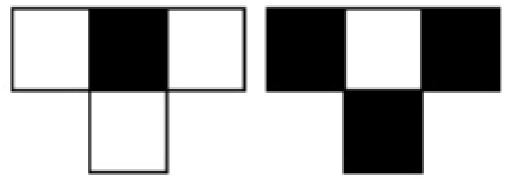


Կարծես ակնհայտ է, որ 10×10 քառակուսի տախտակը կծածկեն 25 T-աձև տետրիմինոներ, քանի որ դրանցից յուրաքանչյուրն ունի 4 վանդակ: Ենթադրենք, որ պնդումը ճիշտ է և ցույց տանք գործնականում:

Այս անգամ ներկենք 10×10 քառակուսին ճիշտ շախմատի տախտակի նման հաջորդաբար սև և սպիտակ գույներով:

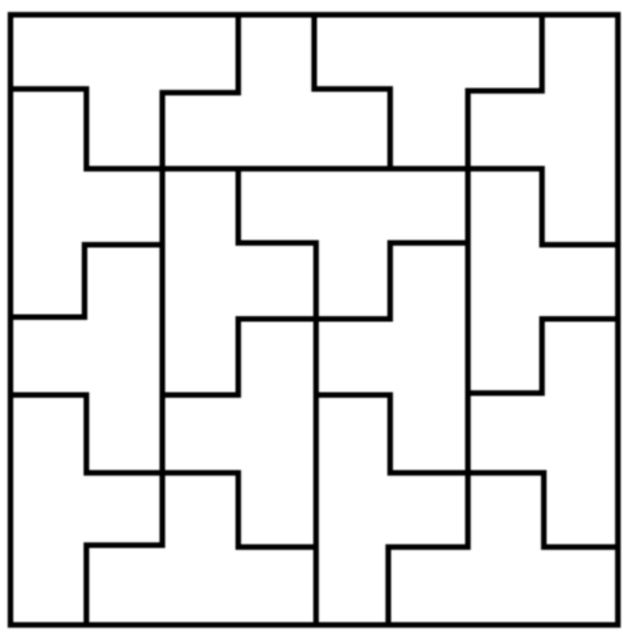


Ստացվեցին ճիշտ 50 սպիտակ և 50 սև վանդակներ: Կառաջանան տետրիմինոների երկու տեսակ, որոնցից մեկը կծածկի 3 սպտակ և 1 սև

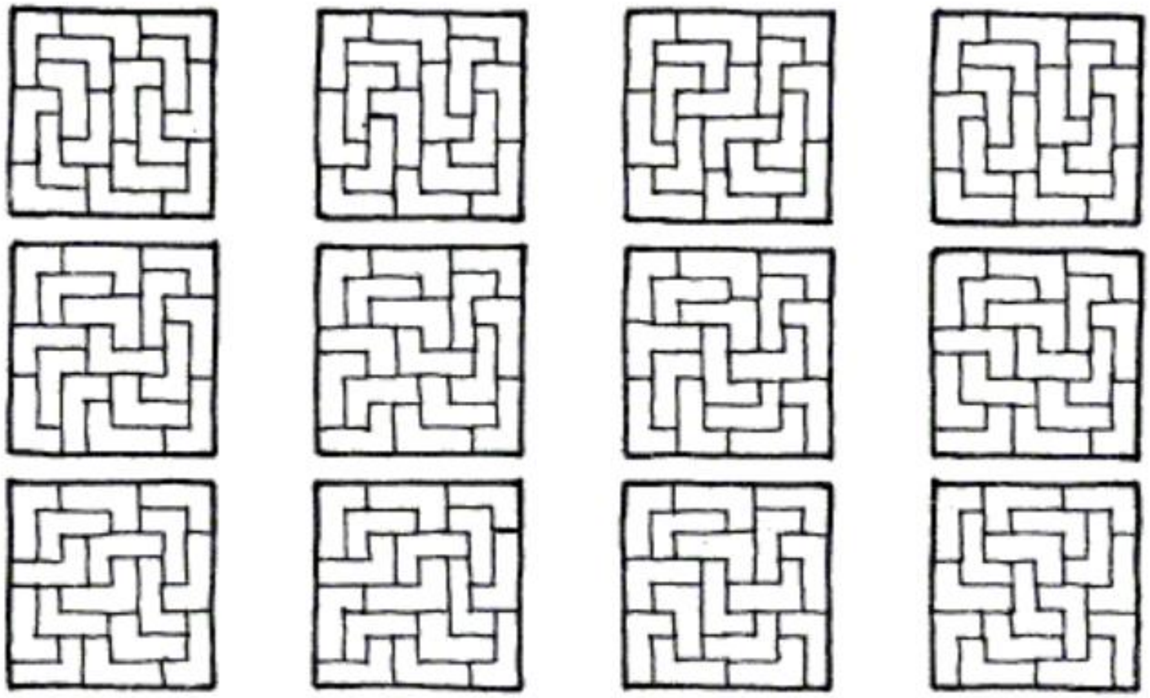


վանդակ, մյուսը 1 սև և 3սպիտակ վանդակ: Եթե նույն տետրիմինոյից վերցնենք 25 հատ, ապա սև և սպիտակ գույների բալանսը կխախտվի: Հետևաբար հնարավոր չէ T-աձև տետրիմինոների միջոցով ծածկել 10×10 քառակուսաձև տախտակը:

Խնդիրը կարելի է լուծել նաև փորձերի միջոցով: Տանք սովորողին 10×10 քառակուսաձև տախտակ և 25 T-աձև տետրիմինոներ, ապա առաջարկենք տարբեր փորձերի միջոցով ստուգել ճիշտ է խնդրի պնդումը, թե՞ ոչ:
Խնդիրը կարելի է փորձել լուծել տարբեր՝ n×n չափի քառակուսիների դեպքում: 8×8 չափի քառակուսու դեպում տետրիմինոները կունենան հետևյալ դասավորությունը.



Երկրորդ խնդիրը ևս կարող ենք դիտարկել 8x8 քառակուսաձև տախտակի վրա. վերջին դեպքի համար կա 12 հնարավոր դասավորություն:



Այսպիսով, արդեն պարզ դարձավ, որ տետրիս խաղի նախատիպը տվել է կոմբինատոր երկրաչափություն գիտությունը, իսկ խաղը լույս է տեսել արդեն 20-րդ դարի երկրորդ կեսին:

Մաթեմատիկական այսպրինակ խնդիրները բազմաթիվ են, որոնք թույլ են տալիս անգամ կրտսեր դպրոցում սովորողին ծանոթանակ կոմբինատոր երկրաչափության խնդիրներին առանց իմանալու այդ գիտության մասին: Իհարկե, կրտսեր սովորողը լուծում է խնդիրը փորձելու, ենթադրելու և բացառելու տարբերակով, առանց հիմնովին ապացույցերի և հակափաստերի:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Կոմբինատոր երկրաչափությունը նախորդ դարի հայտնություններից է, որը գեղեցկացնում է մաթեմատիկան, թույլ է տալիս առավել հետաքրքիր դարձնել երկրաչափությունը: Մաթեմատիկական այս ճյուղի առաջարկած խնդիրները հետաքրիր են, գունավոր, բազմազան, միաժամանակ խաղային և լուրջ ուսումնասիրության արժանի:

Կոմբինատոր երկրաչափության որոշ բաժիններ կարելի է պարզեցնել և առաջարկել սովորողին՝ դարձնելով դրանք ուսումնական նյութ, ուսումնառության առարկա: Այն լավ գործիք է մտքի վարժանքի, տրամաբանական և վերլուծական մտքի, տարածաչափական պատկերացումներ ձևավորման և զարգացման համար:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- И.Ф. Шарыгин, Л.Н.Ерганжиева. Наглядная геометрия. Учебник для 6 класса
- И.Ф. Шарыгин, А.В. Шевкин. Задачи на смекалку.
- Журнал «Математика», сентябрь 2012 г.
- Дж. Конвей, Н. Слоэн. Упаковки шаров, решётки и группы. Мир, 1990
- Яглом, И. М. Проблема тринадцати шаров. Киев, 1975
- Schütte, K. and van der Waerden, B. L. Das Problem der dreizehn Kugeln, 1953
- Шарыгин, Г. И. Контактные числа и проблема тринадцати шаров